

بسمه تعالی

تاریخ: ۹۴/۳/۲۳
وقت: ۱۵۰ دقیقه

دانشگاه گرمسار گروه ریاضی و علوم کامپیوتر
امتحان پایان ترم ریاضی مهندسی (دکتر پوربشاش و دکتر فلاح مقدم)

استفاده از جزوه، کتاب و ماشین حساب در این آزمون مجاز نمی باشد.

(۱) آیا با استفاده از تعریف مشتق، تابع $f(z) = \begin{cases} \frac{\bar{z}}{z} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ در $z = 0$ مشتق پذیر است؟ آیا در $z = 0$ در شرایط قضیه کوشی-ریمان صدق می کند؟ (۷ نمره)

(۲) $u(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}$ ، تابع مختلط $f(z) = u + iv$ را طوری بسازید که $f(z)$ تابعی تحلیلی باشد. (۷ نمره)

(۳) $\int_c ze^z + e^z + |z| dz$ را روی پاره خط واصل از $z = 0$ تا $z = 1 + i$ بیابید. (۷ نمره)

(۴) با استفاده از مفاهیم توابع مختلط انتگرالهای زیر را حساب کنید. (هر قسمت ۸ نمره)

$$\int_c \frac{\sin z}{(z - \frac{\pi}{4})} dz, \int_{|z|=2} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{(z-1)^2} dz, \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{x^8 + 1} dx$$

(c خم بسته دلخواه)

(۵) با کمک سری فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 & -a < x < a \\ 0 & a \leq |x| \leq \pi \end{cases}$ ، مقدار سری $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin na}{n}$ را حساب کنید. (۱۰ نمره)

(۶) با استفاده از انتگرال فوریه تابع $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & 1 \leq |x| \end{cases}$ ، مقدار انتگرال $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \cos \frac{x}{4} dx$ را حساب کنید. (۱۵ نمره)

(۷) معادله $u_{tt} = u_{xx}$ را با شرایط مرزی زیر حل کنید. (۱۵ نمره)
 $u(0, t) = u(1, t) = u_t(x, 0) = 0, u(x, 0) = \sin \pi x \quad 0 \leq x \leq 1, t > 0$

(۸) معادله $u_{xx} + u_{yy} = 0$ را با شرایط مرزی زیر حل کنید. (۱۵ نمره)
 $u(a, y) = 0, u(0, y) = 0, u(x, b) = 0, u(x, 0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$